Feuille de TD 1 - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} -2x+3y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 3x+\sqrt{3}y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$.

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} -2x+3y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} -2x+6y-4z=0 \\ 3x-9y+6z=0 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} -3x+z=0 \\ 2x+y+4z=0 \\ x+2y+9z=0 \end{cases}$, (e) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -3x+2y+z=0 \\ 2x+7y-9z=0 \end{cases}$, (f) $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x+4y+z=0 \\ -x-2y=0 \end{cases}$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=0 \\ -3x_1+x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-4x_4=0 \\ -x_1-2x_3+3x_4=0 \\ 5x_1+2x_2+4x_3-11x_4=0 \end{cases}$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} x+y+z=8 \\ -3x+2y+8z=-1 \\ 2x+5y-3z=-5 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2y-3z=5 \\ 2x-y+2z=-3 \\ 6x+y=1 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 2x+y-3z=7 \\ 4x+5y+z=4 \\ -2x-7y-11z=3 \end{cases}$.

Exercice 5. Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+x_3+3x_4=-2 \\ -4x_1+3x_2-6x_3-3x_4=2 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+3x_4=3 \\ -x_1+5x_2+2x_3+2x_4=-2 \\ 2x_1+4x_2+7x_3-2x_4=13 \\ 3x_2+4x_3-5x_4=9 \end{cases}$.

Exercice 6. Déterminer pour quelles valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = a \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = b \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = c \end{cases}$$

(a) admet une solution unique ;

(b) admet une infinité de solutions ;

(c) n'a pas de solutions.

Expliciter les solutions pour $a = b = c = 1$.

Exercice 7. Déterminer pour quels valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases}$$

(a) admet une solution unique ;

(b) admet une infinité de solutions ;

(c) n'a pas de solutions.

Expliciter les solutions pour $a = b = 2$.

Exercice 8. Déterminer pour quels valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} ax + y + 2z = b \\ 2x + z = 1 \\ 2y + 3az = 3 \end{cases}$$

(a) admet une solution unique ;

(b) admet une infinité de solutions ;

(c) n'a pas de solutions.

Expliciter les solutions pour $a = b = 0$.

Exercice 9. Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées complexes $x, y, z \in \mathbb{C}$:

(a) $\begin{cases} x + iy = 0 \\ 3x + 2y + z = 4 + i \\ ix - y + (1 + i)z = 2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + iy - 3z = 1 \\ ix - y - iz = -1 \\ -x - iy - (3 + 4i)z = -3 - 2i \end{cases}$.